Cv. 13.: Určete rovnici přímky q (v obecném tvaru), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem M.

$p = \{[3+t;\ 4-2t];t \in R\}$ $\qquad$ $M = [5;-7]$

Cv. 14.: Určete rovnici přímky q (v obecném tvaru), která je kolmá k přímce p a prochází bodem M.

$p = \{[5-2t;\ -4+4t];t \in R\}$ $\qquad$ $M = [6;2]$

Cv. 15.: Určete rovnici přímky q (v parametrickém tvaru), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem M.

$p: 7x - 6y + 3 = 0$ $\qquad$ $M = [0;-3]$

Cv. 16.: Určete rovnici přímky q (v obecném tvaru), která je kolmá k přímce p a prochází bodem M.

$p = \{[3+4t;\ -1-7t];t \in R\}$ $\qquad$ $M = [3;2]$

Cv. 17.: Je dána přímka p a bod M.

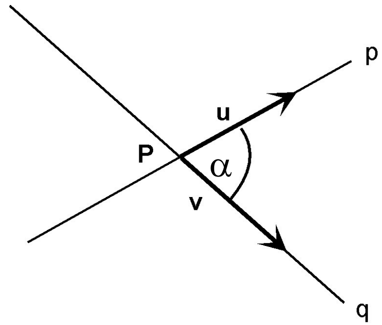
$p = \{[2+2t;\ 8-3t];t \in R\}$ $\qquad$ $M = [1;3]$

1) Určete, zda bod M leží na přímce p.
2) Určete rovnici přímky q (v parametrickém tvaru), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem M.
3) Určete rovnici přímky m (v parametrickém tvaru), která je kolmá k přímce p a prochází bodem M.
4) Určete průsečík přímek p a m.

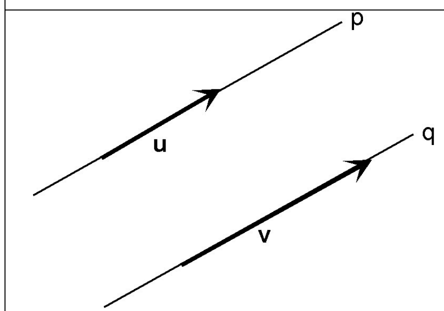
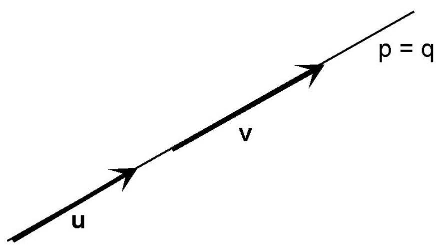
Řešení: 7) $q = \{[5-s;4-2s];s \in R\}$; 8) $m = \{[5+2s;4-s];s \in R\}$; 9) $q = \{[3+3s;5-2s];s \in R\}$; 10) $q = \{[4s;7+s];s \in R\}$; 11) $q: 4x - y - 1 = 0$; 12) $q: 3x - 5y - 4 = 0$; 13) $q: 2x + y - 3 = 0$; 14) $q: -2x + 4y + 4 = 0$; 15) $q = \{[6s;-3+7s];s \in R\}$; 16) $q: 4x - 7y + 2 = 0$; 17) a) $M \notin p$, b) $q = \{[1+2s;3-3s];s \in R\}$, c) $m = \{[1+3r;3+2r];r \in R\}$, d) $P = [4;5]$

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK

1) Přímky jsou <u>různoběžné</u>
   a) směrové vektory nejsou lineárně závislé
   b) mají jeden společný bod – průsečík (P)
   c) svírají úhel α – $\alpha \neq 0°; 180°$



2) Přímky jsou <u>rovnoběžné</u>
   a) směrové vektory jsou lineárně závislé
   b) nemají společný bod (rovnoběžné – různé) nebo mají všechny body společné (rovnoběžné – splývající)
   c) svírají úhel $0°$

Rovnoběžné – různé	Rovnoběžné - splývající
	

Vzájemnou polohu přímek určíme ze vztahu jejich směrových vektorů. (Směrový vektor přímky určuje její směr.)

Parametrický tvar rovnice přímky

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

p: $x = 3 - t$, $y = 1 + 2t$, $t \in R$ q: $x = 5 - 2s$, $y = -3 + 4s$, $s \in R$

Řešení:

Určíme směrové vektory přímek p a q:

$\overrightarrow{u_p} = (-1;2)$ $\overrightarrow{u_q} = (-2;4)$

Směrové vektory jsou lineárně závislé ($\overrightarrow{u_q} = 2\overrightarrow{u_p}$). To znamená, že přímky jsou rovnoběžné ($p \parallel q$). Nyní určíme, zda jsou různé nebo splývající. Zvolíme libovolný bod jedné přímky a vyzkoušíme, zda leží i na přímce druhé.

$A_p = [3;1]$ q: $3 = 5 - 2s \Rightarrow s = 1$

$1 = -3 + 4s \Rightarrow s = 1$

$A_p \in q$

Protože přímky mají jeden bod společný, mají společné všechny body. To znamená, že přímky jsou rovnoběžné – splývající.

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

p: $x = 3 + 4t$, $y = -5 + 8t$, $t \in R$ q: $x = -5 + 6s$, $y = 9 - 3s$, $s \in R$

Řešení:

Určíme směrové vektory přímek p a q:

$\overrightarrow{u_p} = (4;8)$ $\overrightarrow{u_q} = (6;-3)$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 71°34'$$

Cv. 6.: U různoběžných přímek ze cv. 4. určete úhel, který svírají.

Řešení: 2) $p \perp q$; 4) $p \perp q$; 6) $25°3'$

Další příklady

Cv. 7.: Určete rovnici přímky q (v parametrickém tvaru), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem M:

$p = \{[3-t;\ 3-2t]; t \in R\}$ $M = [5;4]$

Cv. 8.: Určete rovnici přímky m (v parametrickém tvaru), která je kolmá k přímce p a prochází bodem M:

$p = \{[3-t;\ 3-2t]; t \in R\}$ $M = [5;4]$

Cv. 9.: Určete rovnici přímky q (v parametrickém tvaru), která je kolmá k přímce p a prochází bodem M:

p: $3x - 2y + 1 = 0$ $M = [3;5]$

Cv. 10.: Určete rovnici přímky q (v parametrickém tvaru), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem M:

p: $-x + 4y - 6 = 0$ $M = [0;7]$

Cv. 11.: Určete rovnici přímky q (v obecném tvaru), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem M.

p: $4x - y + 5 = 0$ $M = [1;3]$

Cv. 12.: Určete rovnici přímky q (v obecném tvaru), která je kolmá k přímce p a prochází bodem M.

p: $5x + 3y - 12 = 0$ $M = [3;1]$

Řešení: 1) p||q (různé); 2) $p \times q$; 3) p||q (různé); 4) $p \times q$; 5) p||q (splývající); 6) $p \times q$

Průsečík

Př.: Určete průsečík přímek p a q:

p: $2x - y + 6 = 0$ q: $x + y - 3 = 0$

Řešení:

Průsečík přímek je bod, který leží na obou přímkách. To znamená, že jeho souřadnice vyhovují oběma rovnicím přímek

$$\begin{aligned} 2x - y + 6 &= 0 \\ \underline{x + y - 3} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

Řešíme soustavu rovnic.

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{P = [-1;4]}$

Cv. 5.: U různoběžných přímek ze cv. 4. určete průsečík.

Řešení: 2) P = [3;3]; 4) P = [-3;0]; 6) $P = \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

Odchylka přímek

Odchylka přímek – úhel, který přímky svírají.

Přímky svírají stejný úhel jako jejich normálové vektory.

Př.: Určete odchylku přímek p a q:

p: $2x - y + 6 = 0$ q: $x + y - 3 = 0$

Řešení:

Normálové vektory přímek p a q:

$\overrightarrow{v_p} = (2;-1)$ $\overrightarrow{v_q} = (1;1)$

Potom $\overrightarrow{v_p} \cdot \overrightarrow{v_q} = 2 - 1 = 1$ $\left|\overrightarrow{v_p}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\left|\overrightarrow{v_q}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Směrové vektory nejsou lineárně závislé ($\overrightarrow{u_q} \neq k\overrightarrow{u_p}$). To znamená, že přímky jsou různoběžné ($p \times q$).

Cv. 1.: Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

1) p: $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $t \in R$ q: $x = 5 - 2s$, $y = 5 - 4s$, $s \in R$

2) p: $x = 1 + 3t$, $y = 5 - 2t$, $t \in R$ q: $x = 4 + 2s$, $y = 3 + s$, $s \in R$

3) p: $x = 3 + 3t$, $y = -t$, $t \in R$ q: $x = 6s$, $y = 2 - 2s$, $s \in R$

4) p: $x = 3 + t$, $y = 1 - 3t$, $t \in R$ q: $x = 13 + 3s$, $y = 7 + 9s$, $s \in R$

5) p: $x = t$, $y = 2t$, $t \in R$ q: $x = 2 + 6s$, $y = 9 - 3s$, $s \in R$

6) $p = \{[7 + 5t; 11 + 4t];\ t \in R\}$ $q = \{[10 + 10s; 24 + 8s];\ s \in R\}$

7) $p = \{[5; 4 + t];\ t \in R\}$ $q = \{[2s; 2s];\ s \in R\}$

Řešení: 1) $p \times q$; 2) $p \times q$; 3) p || q (různé); 4) $p \times q$; 5) $p \times q$; 6) p || q (různé); 7) $p \times q$

Průsečík

Př.: Určete průsečík přímek p a q (viz. 2. příklad).

Řešení:

Průsečík přímek je bod, který leží na obou přímkách. To znamená, že jeho souřadnice vyhovují oběma rovnicím přímek p: $x = 3 + 4t$ q: $x = -5 + 6s$

$y = -5 + 8t \quad t \in R$ $y = 9 - 3s \quad s \in R$

Tedy:

$3 + 4t = -5 + 6s$ Řešíme soustavu rovnic.

$\underline{-5 + 8t = 9 - 3s}$

$4t - 6s = -8$

$\underline{8t + 3s = 14}$

$t = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 4.1 = 7$

$y = -5 + 8.1 = 3 \quad \underline{\underline{P = [7;3]}}$

nebo $s = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -5 + 6.2 = 7$

$y = 9 - 3.2 = 3 \quad \underline{\underline{P = [7;3]}}$

Cv. 2.: U různoběžných přímek ze cv. 1. určete průsečík.

Řešení: 1) P = [3;1]; 2) P = [4;3]; 4) P = [7;-11]; 5) P = [4;8]; 7) P = [5;5]

Odchylka přímek

Odchylka přímek – úhel, který přímky svírají.

Přímky svírají stejný úhel jako jejich směrové vektory.

Př.: Určete úhel, který svírají přímky p a q z 2. příkladu.

Řešení:

Směrové vektory přímek p a q:

$\overrightarrow{u_p} = (4;8)$ $\overrightarrow{u_q} = (6;-3)$

Potom $\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q = 24 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{p \perp q}}$

Cv. 3.: U různoběžných přímek ze cv. 1. určete jejich odchylku.

Řešení: 1) $p \perp q$; 2) $\alpha = 60°15'$; 4) $\alpha = 143°8'$; 5) $p \perp q$; 7) $\alpha = 45°$

Obecný tvar přímky

Vzájemnou polohu přímek můžeme určit ze vztahu jejich normálových vektorů. (Normálový vektor přímky je kolmý na směrový vektor. To znamená, že normálové vektory mají stejný vztah jako směrové vektory přímek.)

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

p: $x + 2y - 3 = 0$

q: $3x + 6y - 9 = 0$

Řešení:

Určíme normálové vektory přímek p a q:

$\overrightarrow{v_p} = (1;2)$ $\overrightarrow{v_q} = (3;6)$

Normálové vektory jsou lineárně závislé ($\overrightarrow{v_q} = 3\overrightarrow{v_p}$). To znamená, že přímky jsou rovnoběžné ($p \parallel q$). Nyní určíme, zda jsou různé nebo splývající. U obecného tvaru stačí zjistit, zda vztah, který mají normálové vektory, mají i koeficienty c.

$c_q = 3c_p$

$-9 = 3 \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad$ přímky jsou <u>rovnoběžné – splývající</u>

Cv. 4.: Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

1) p: $x - y + 5 = 0$ q: $-x + y + 8 = 0$
2) p: $2x - y - 3 = 0$ q: $x + 2y - 9 = 0$
3) p: $3x + y + 5 = 0$ q: $9x + 3y - 10 = 0$
4) p: $x - y + 3 = 0$ q: $2x + 2y + 6 = 0$
5) p: $2x + y + 2 = 0$ q: $4x + 2y + 4 = 0$
6) p: $3x + 4y - 3 = 0$ q: $15x + 8y - 9 = 0$