c = -11 $\Rightarrow$ p: 4x – 3y – 11 = 0

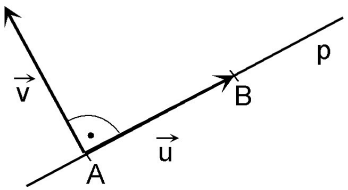
Cv. 15.: Určete analytické vyjádření přímky p v obecném tvaru, jestliže prochází body A a B:

1) A = [3;-2], B = [3;2] 2) A = [1;2], B = [-5;-1]

Řešení: 1) p: x – 3 = 0; 2) p: x – 2y + 3 = 0

Příklad.: Určete analytické vyjádření přímky p ve všech tvarech, jestliže prochází body A = [1;-1] a B = [2;1].

Řešení:



1) Ze dvou bodů určíme směrový vektor, který použijeme na parametrický tvar.
2) Ze směrového vektoru vytvoříme normálový vektor, který použijeme na obecný tvar.
3) Obecný tvar převedeme na směrnicový.

Bod použijeme například A.

1) $\vec{u}_{AB} = B - A = (1;2)$. Potom:

p: x = 1 + t
y = -1 + 2t t$\in$R.

2) $\vec{u} = (1;2)$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = (2;-1)$ Potom:

2x – y + c = 0

2.1 – (-1) + c = 0

c = -3 $\Rightarrow$ p: 2x – y – 3 = 0

3) 2x – y – 3 = 0 $\Rightarrow$ p: y = 2x – 3

PŘÍMKA

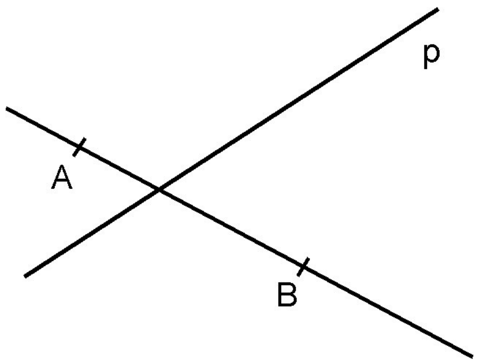
Definice: Přímka je základní geometrický útvar, který má pouze délku. (Definice podle Euklida.)

Definice: Analytické vyjádření přímky je rovnice, která charakterizuje všechny body přímky (udává společnou vlastnost všech bodů přímky).

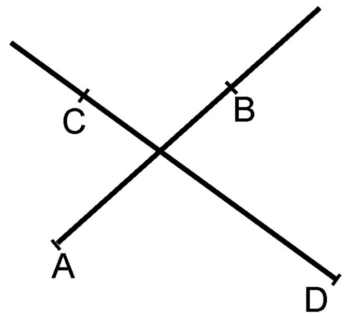
Označení

přímka	p; q; m; ...
přímka procházející body A a B	$\leftrightarrow$ AB
polopřímka AB (začíná v bodě A)	$\rightarrow$ AB
úsečka AB	AB

Přímka p
Přímka $\leftrightarrow$ AB



Polopřímka $\rightarrow$ AB
Polopřímka $\rightarrow$ DC



Analytické vyjádření přímky

Přímku můžeme zadat ve třech tvarech analytického vyjádření:

1) směrnicový tvar

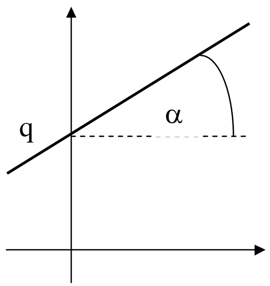
2) parametrický tvar

3) obecný tvar

Směrnicový tvar analytického vyjádření

Definice: Směrnicový tvar přímky je $y = kx + q$.

Označení:



x,y jsou souřadnice libovolného bodu přímky

k je směrnice ($k = \operatorname{tg} \alpha$)

q je místo, kde přímka protíná osu o_y

Příklad.: Určete úhel, který svírá přímka p: $y = 2x - 4$ s osou o_x a průsečík s osou o_y..

Řešení:

$\operatorname{tg}\alpha = 2$

$\alpha = 63{,}4349488...^\circ = 63^\circ 26'$

Přímka p svírá s osou o_x úhel $63^\circ 26'$ a protíná osu o_y v bodě [0;-4].

Protože je směrnice (k = 2) kladná, přímka je rostoucí.

Cv. 1.: Určete úhel, který svírají přímky s osou o_x a jejich průsečíky s osou o_y:

1) p: $y = -4x + 3$

2) p: $y = 3x + 2$

3) p: $y = \frac{1}{2}x - 6$

4) p: $y = -\frac{3}{4}x + 11$

Řešení: 1) $\alpha = -75^\circ 58' = 104^\circ 2'$; průsečík [0;3]; 2) $\alpha = 71^\circ 34'$; průsečík [0;2]; 3) $\alpha = 26^\circ 34'$; průsečík [0;-6]; 4) $\alpha = -36^\circ 52' = 143^\circ 8'$ průsečík [0;11]

2) A = [2;-2], B = [-1;-2], m: $x + 3y + 1 = 0$

Řešení: 1) $A \in m$; $B \in m$; 2) $A \notin m$; $B \notin m$

Příklad.: Určete analytické vyjádření přímky p (v obecném tvaru), která prochází bodem A = [-1;3] a její směrový vektor je $\vec{u} = (2;-4)$.

Řešení:

Na obecný tvar potřebujeme vektor normálový (kolmý k přímce). Proto najdeme kolmý vektor k směrovému vektoru.

$\vec{u} = (2;-4) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (4;2)$

Nyní postupujeme už stejně:

$4x + 2y + c = 0$

$4.(-1) + 2.3 + c = 0$

$c = -2 \quad \Rightarrow \quad$ p: $4x + 2y - 2 = 0$

Cv. 14.: Určete analytické vyjádření přímky p (v obecném tvaru), která prochází bodem A a její směrový vektor je $\vec{u}$:

1) A = [-1;2], $\vec{u} = (1;-1)$

2) A = [2;3], $\vec{u} = (3;2)$

Řešení: 1) p: $x + y - 1 = 0$; 2) p: $2x - 3y + 5 = 0$

Příklad.: Určete analytické vyjádření přímky p v obecném tvaru, jestliže prochází body A = [2;-1] a B = [5;3].

Řešení:

Pomocí dvou bodů určíme směrový vektor, a potom z něho vytvoříme normálový vektor přímky. Dále postupujeme obdobně jako v minulém příkladu.

$\vec{u} = B - A = (3;4) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (4;-3)$

$4x - 3y + c = 0$

$4.2 - 3.(-1) + c = 0$ (využili jsme bod A)

$2 - 2y + 6 = 0$
$-2y = -8$
$y = 4$ tedy libovolný bod je $\underline{\underline{A = [2;4]}}$.

Nebo můžeme dosadit za y třeba 1. Potom:

$x - 2 \cdot 1 + 6 = 0$
$x - 2 + 6 = 0$
$x = -4$ tedy libovolný bod je $\underline{\underline{B = [-4;1]}}$.

Mohu dosadit za libovolnou souřadnici libovolné číslo. Druhou souřadnici pouze dopočítáme.

Cv. 12.: Určete libovolný bod přímky m:

1) m: 3x – y + 12 = 0 2) m: 2x + y + 9 = 0

Řešení: 1) [1;15]; 2) [2;-13]

Příklad.: Určete, zda body A = [8;-8] a B = [6;9] leží na přímce p: x – y + 3 = 0.

Řešení:

Pokud je bod A = [8;-8] bodem přímky, pak platí pro souřadnice bodu rovnice přímky:

8 – (-8) + 3 = 0

19 = 0 tedy $\underline{\underline{A \notin p}}$

Pokud je bod B = [6;9] bodem přímky, pak platí pro souřadnice bodu rovnice přímky:

6 – 9 + 3 = 0

0 = 0 tedy $\underline{\underline{B \in p}}$

Cv. 13.: Určete, zda body A a B leží na přímce m.

1) A = [2;1], B = [-1;0], m: 2x – 6y + 2 = 0

Příklad.: Přímka p svírá s osou o_x úhel 35° a osu o_y protíná v bodě P = [0;-7]. Určete analytické vyjádření přímky p ve směrnicovém tvaru (směrnici zaokrouhlete na jedno desetinné místo).

Řešení:

$k = \mathrm{tg}35° = 0{,}70020... \doteq 0{,}7$
$q = -7$
$\underline{\underline{p: y = 0{,}7x - 7}}$

Příklad.: Určete analytické vyjádření přímky p ve směrnicovém tvaru, jestliže přímka svírá s osou o_x úhel 60° a osu o_y protíná v bodě [0;4]. Směrnici určete přesně.

Řešení:

$k = \mathrm{tg}60° = \sqrt{3}$
$q = 4$
$\underline{\underline{p: y = \sqrt{3}x + 4}}$

Cv. 2.: Určete analytické vyjádření přímek ve směrnicovém tvaru, jestliže přímky svírají s osou o_x úhel α a osu o_y protínají v bodě A. Směrnici určete přesně.

1) α = 30° A = [0;6] 2) α = 120° A = [0;-5]

Řešení: 1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$; 2) $y = -\sqrt{3}x - 5$

Cv. 3.: Určete analytické vyjádření přímek ve směrnicovém tvaru, jestliže přímky svírají s osou o_x úhel α a osu o_y protínají v bodě P. Směrnici zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

1) α = 36°30′ P = [0;10] 2) α = 57°21′ P = [0;-1]

Řešení: 1) y = 0,74x + 10; 2) y = 1,56x – 1

Příklad.: Určete analytické vyjádření přímky p ve směrnicovém tvaru, jestliže přímka svírá s osou o_x úhel $150°$ a prochází bodem $P = [\sqrt{3};2]$. Počítejte přesně.

Řešení:

$$k = \mathrm{tg}\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$p: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + q$$

Protože přímka prochází bodem $P = [\sqrt{3};2]$, platí:

$$2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} + q$$

$$2 = -1 + q$$

$$3 = q \quad \text{tedy} \qquad \underline{\underline{p: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3}}$$

Cv. 4.: Určete analytické vyjádření přímek ve směrnicovém tvaru, jestliže přímky svírají s osou o_x úhel α a prochází bodem A. Směrnici zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

1) $\alpha = 46°40'$ $A = [10;11]$ 2) $\alpha = 21°50'$ $A = [5;1]$

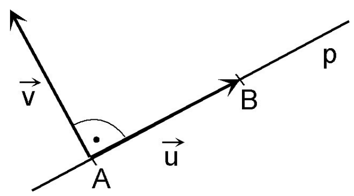
Řešení: 1) y = 1,06x + 0,4; 2) y = 0,4x – 1

Parametrický tvar analytického vyjádření

Definice: Parametrický tvar přímky je:

$$p: \quad x = a_1 + u_1.t$$
$$y = a_2 + u_2.t \qquad t \in R.$$

Příklad.: Určete analytické vyjádření přímky (v obecném tvaru), která prochází bodem $A = [-1;2]$ a její kolmý vektor je $\vec{v} = (5;4)$.



Řešení:

Kolmý vektor dosadíme do rovnice:

5x + 4y + c = 0.

K výpočtu absolutního koeficientu c využijeme bod A, který je bodem přímky.

5.(-1) + 4.2 + c = 0

c = -3 tedy <u>p: 5x + 4y – 3 = 0</u>

Cv. 10.: Určete analytické vyjádření přímek v obecném tvaru, které prochází bodem M a jejich normálový vektor je $\vec{v}$:

1) $M = [1;-4]$; $\vec{v} = (2;1)$

2) $M = [3;1]$; $\vec{v} = (-1;3)$

3) $M = [2;1]$; $\vec{v} = (2;-6)$

Řešení: 1) 2x + y + 2 = 0; 2) -x + 3y = 0; 3) 2x – 6y + 2 = 0

Příklad.: Určete normálový vektor přímky p: 5x + 8y – 10 = 0.

Řešení:

Normálový vektor (vektor kolmý k přímce p) je $\underline{\underline{\vec{v} = (5;8)}}$.

Cv. 11.: Určete normálový vektor u přímek:

1) p: 4x – 3y – 8 = 0 2) q: -5x + 8y + 19 = 0

Řešení: 1) $\vec{v} = (4;-3)$; 2) $\vec{v} = (-5;8)$

Příklad.: Určete libovolný bod přímky q: x – 2y + 6 = 0

Řešení: Například za x dosadím 2. Potom: