Cv. 13.: Body A = [-2; 2]; B = [2; -1] a C = [1; 6] tvoří trojúhelník. Určete typ trojúhelníku (podle stran i podle úhlů).

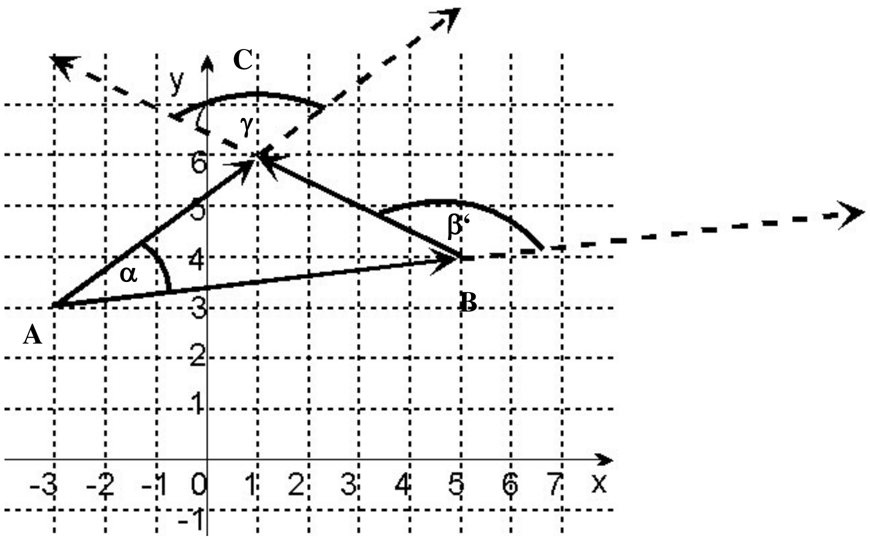
Řešení: pravoúhlý ($\alpha = 90°$) a rovnoramenný ($b = c$)

Cv. 14.: Body A = [-3; 3]; B = [0; -1], C = [4; 2] a D = [1; 6] tvoří čtyřúhelník. Určete typ čtyřúhelníku.

Řešení: všechny strany shodné, úhly jsou pravé $\Rightarrow$ čtverec

Cv. 15.: Body A = [-3; 3]; B = [5; 4] a C = [1; 6] tvoří trojúhelník. Určete všechny vnitřní úhly trojúhelníku.

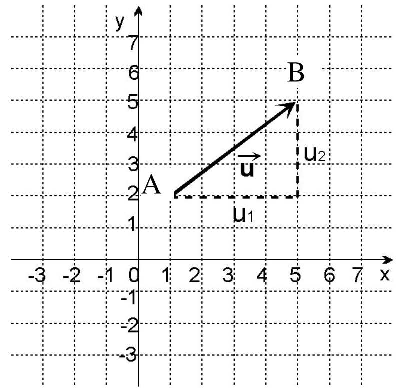
Řešení: $\alpha = 29°45'$; $\beta = 33°41'$; $\gamma = 116°34'$



VEKTOR

Definice: Vektor je posunutí bodu

$\vec{u}_{AB} = (4; 3)$



vektor se označuje malými písmeny se šipkou nahoře (v tištěném textu se označuje tučně) $\Rightarrow$ $\vec{u}$ = **u**

závorky souřadnic vektoru ( )

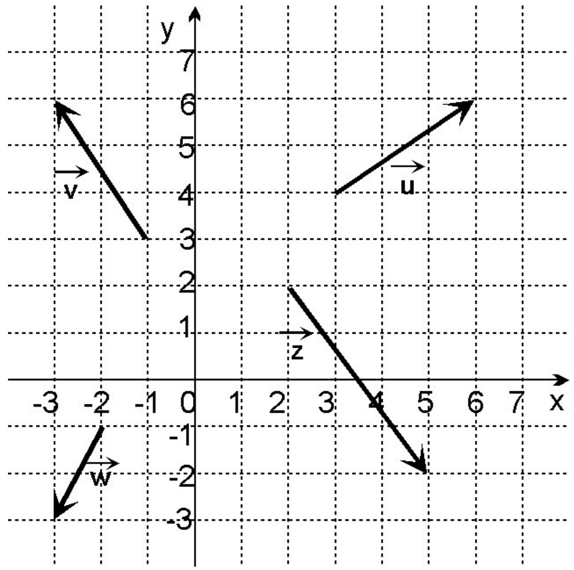
první souřadnice je x-ová

druhá souřadnice je y-ová

bod A je počáteční bod vektoru

bod B je koncový bod vektoru

Příklad.: Určete souřadnice vektorů z obrázku:



Řešení:

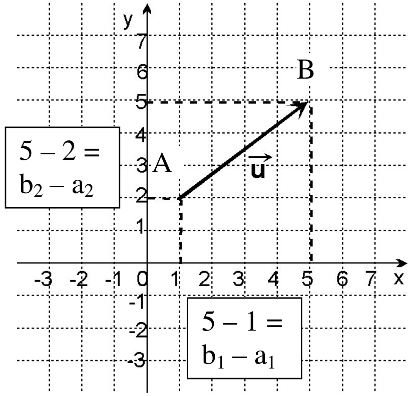
$\vec{u} = (3; 2)$

$\vec{v} = (-2; 3)$

$\vec{w} = (-1; -2)$

$\vec{z} = (3; -4)$

A = [1; 2]   B = [5; 5]



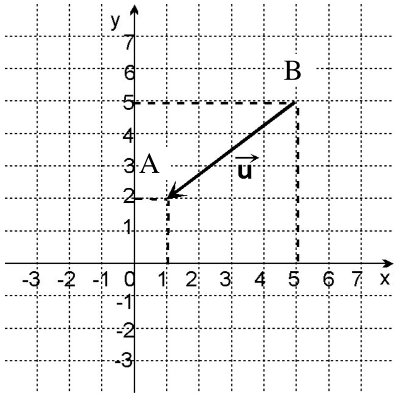
Určete vektor **u**, který je určen body A a B:

Řešení:

$\mathbf{u}_{AB}$ = B – A = (4; 3)

Příklad.:

A = [1; 2]   B = [5; 5]



Určete vektor **u**, který je určen body B a A:

Řešení:

$\mathbf{u}_{BA}$ = A – B = (-4; -3)

Cv. 1.: Určete souřadnice vektorů z počátečního a koncového bodu:

1) A = [4; 5]   B = [1; 5] $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_{AB}$ = ?

2) C = [2; -5]   D = [4; 1] $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_{CD}$ = ?

3) A = [0; 3]   B = [2; 7] $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_{BA}$ = ?

4) C = [2; -1]   D = [-3; 4] $\Rightarrow$ $\mathbf{u}_{DC}$ = ?

Řešení: 1) 0° 2) 0° 3) 0°

Poučka: Vektory, které svírají 0° (mají stejný směr) se nazývají lineárně závislé vektory.

Poučka: Vektory, které svírají 180° (mají opačný směr) se nazývají také lineárně závislé vektory.

Definice: Vektory jsou lineárně závislé, jestliže je jeden násobkem druhého.

Příklad.: Určete, zda vektory **u** = (21; 12) a **v** = (7; 4) jsou lineárně závislé.

Řešení: **u** = 3 . **v** $\Rightarrow$ vektory **u** a **v** jsou lineárně závislé.

Cv. 10.: Určete, které z dvojic vektorů jsou lineárně závislé.

1) **u** = (5; 3)   **v** = (10; 6)

2) **u** = (-12; -9)   **v** = (-4; -3)

3) **u** = (5; 2)   **v** = (15; 4)

4) **u** = (16; 12)   **v** = (4; 4)

5) **u** = (5; 2)   **v** = (-5; -2)

Řešení: 1) ano 2) ano 3) ne 4) ne 5) ano

Cv. 11.: Určete, zda body A = [1; 3]; B = [2; 4] a C = [6; 8] tvoří trojúhelník.

Cv. 12.: Určete, zda body A = [-1; 2]; B = [4; 4] a C = [1; -3] tvoří trojúhelník.

Řešení: 10) ne; 11) ano (je pravoúhlý)

Cv. 7.: Určete úhel vektorů **u** a **v**:

1) **u** = (4; -3) **v** = (15; 8)

2) **u** = (-8; 6) **v** = (-8; 15)

3) **u** = (5; 2) **v** = (-2; -3)

4) **u** = (4; 3) **v** = (-6; 8)

5) **u** = (3; 2) **v** = (2; -3)

6) **u** = (7; 6) **v** = (-6; 7)

Řešení: 1) 64°56′33″ 2) 25°3′27″ 3) 145°29′29″ 4) 90° 5) 90° 6) 90°

Poučka: Kolmé vektory mají vždy skalární součin roven nule.

Příklad.: Určete k vektoru **u** = (3; 6) kolmý vektor **v**.

Řešení: Aby byl vektor kolmý, musí mít skalární součin roven nule. Nejjednodušší je **v** = (6; -3) nebo **v** = (-6; 3).

Cv. 8.: Určete kolmý vektor k vektorům:

1) **u** = (4; -5)

2) **u** = (-9; 7)

3) **u** = (5; 2)

4) **u** = (-8; -7)

Řešení: 1) (5;4) 2) (7;9) 3) (2;-5) 4) (7;-8)

Cv. 9.: Určete úhel vektorů **u** a **v**:

1) **u** = (4; -3) **v** = (8; -6)

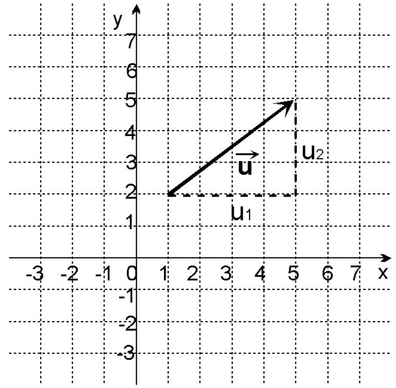
2) **u** = (-8; -6) **v** = (-4; -3)

3) **u** = (5; 2) **v** = (15; 6)

Řešení: 1) (-3;0); 2) (2;6); 3) (-2;-4); 4) (5;-5)

Velikost vektoru

$\vec{u} = (4; 3)$



$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5j$$

Příklad.: Určete velikost vektoru $\vec{v} = (6; -8)$.

Řešení: $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10j$

Cv. 2.: Určete velikost vektoru $\vec{v} = (-8; 15)$.

Cv. 3.: Určete velikost vektoru $\vec{u} = (3; \sqrt{7})$.

Cv. 4.: Určete velikost vektoru $\vec{u} = (4; 8)$.

Řešení: 2) |**v**| = 17 j; 3) |**u**| = $\sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4j$;

4) |**u**| = $\sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}j$

Operace s vektory

Jsou dány vektory **u** = (u_1; u_2) a **v** = (v_1; v_2).

Sčítání vektorů:

u + v = (u_1+v_1; u_2+v_2)

Odčítání vektorů:

$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$

Násobení vektorů:

1) násobení vektoru skalárem $\quad k \,.\, \mathbf{u} = (k.u_1; k.u_2) \quad k \in R$
2) násobení vektoru vektorem
   a) skalární součin $\quad \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = u_1 \,.\, v_1 + u_2 \,.\, v_2$
   b) vektorový součin $\quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (.......)$

Příklad.: Vypočítejte:

u = (4; 5) **v** = (2; 4)	Řešení:
u + v =	(6; 9)
u – v =	(2; 1)
v – u =	(-2; -1)
3 . **u =**	(12; 15)
$\frac{1}{2}$. **v =**	(1; 2)
u . v =	4.2 + 5.4 = 8 +20 = 28

Cv. 5.: Pro vektory **u** = (3; -2) **v** = (3; -6) vypočítejte:

1) **u + v** =
2) **u – v** =
3) **v – u** =
4) (-2) . **u** =
5) $\frac{1}{3}$. **v** =
6) **u . v** =

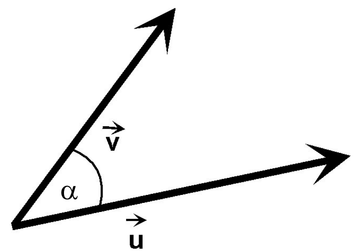
Řešení: 1) (6;-8) 2) (0;4) 3) (0;-4) 4) (-6;4) 5) (1;-2) 6) 9+12=21

Cv. 6.: Určete skalární součin vektorů **u** a **v**:

1) **u** = (4; 2) **v** = (2; -3)
2) **u** = (-1; 3) **v** = (-2; -1)
3) **u** = (4; 3) **v** = (-6; 8)
4) **u** = (5; 2) **v** = (-2; -3)
5) **u** = (3; 2) **v** = (2; -3)
6) **u** = (7; 6) **v** = (-6; 7)

Řešení: 1) 2 2) -1 3) 0 4) -16 5) 0 6) 0

Úhel vektorů



Vektory **u** a **v** svírají úhel α:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Příklad.: Určete, jaký úhel svírají vektory **u** = (3; 4) a **v** = (8; 6).

Řešení:

u . v = 24 +24 =48

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{j}$

$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{j}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{48}{5\cdot 10} = 0{,}96$$

$$\alpha = 16{,}260204...^\circ = \underline{\underline{16^\circ 15' 37''}}$$