2. způsob:

Užijeme vzorec pro výpočet x-ové souřadnice vrcholu: $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$:

$x = -\frac{-8}{2.1} = 4 \Rightarrow$ nyní můžeme dopočítat y-ovou souřadnici vrcholu:

$y = 4^2 - 8.4 + 11 = 16 - 32 + 11 = -5$ Tedy $\underline{\underline{V = [4;-5]}}$

Příklad 8.:

Určete vrchol grafu funkce f: $y = 2x^2 - 4x - 5$.

Řešení:

1. způsob:

Nejdříve musíme vytknout 2, a pak doplníme do vzorce:

$y = 2(x^2 - 2x) - 5 = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5 = 2(x - 1)^2 - 2 - 5 = 2(x - 1)^2 - 7$

Tedy $\underline{\underline{V = [1;-7]}}$

2. způsob:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.2} = 1 \Rightarrow y = 2.1^2 - 4.1 - 5 = -7$

Tedy $\underline{\underline{V = [1;-7]}}$

Cv. 6.:

Určete vrchol grafu funkcí:

1) f: $y = x^2 + 4x - 5$
2) f: $y = x^2 - 10x + 5$
3) f: $y = -2x^2 - 4x - 2$
4) f: $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 18$

Autor: Mgr. Lechnerová

Publikace neprošla jazykovou úpravou a je určena pro vnitřní potřebu školy.

Kvadratická funkce

Definice: **Kvadratická funkce f je dána rovnicí**

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{kde } a,b,c \in R \text{ a } a \neq 0.$$

Grafem kvadratické funkce je parabola.

Každá rovnice kvadratické funkce lze vyjádřit ve tvaru $y = a.(x - m)^2 - n$, kde m, n jsou souřadnice vrcholu paraboly.

Pojmy:

V = [m;n] ....vrchol paraboly

koeficient a ....určuje rozevření ramen paraboly

$a > 0$ pak jsou ramena nahoru

$a < 0$ pak jsou ramena dolů

Cv. 1.:

Určete, které funkce jsou kvadratické. U kvadratických funkcí určete, které grafy funkce mají ramena nahoru a které dolů:

Funkce	Řešení
1) f: $y = 2x^2 + 3x + 1$ 2) f: $y = -2x^3 + 1$ 3) f: $y = -x^2 - 4x - 3$ 4) $f: y = \frac{2}{x^2 - 1}$ 5) f: $y = -4(x - 1)^2 + 16$	

6) $f: y = \frac{1}{3}x^2$ 7) f: $y = 5(x+2)^2 + 10$ 8) f: $y = -3x^2 + 6$	

Graf:

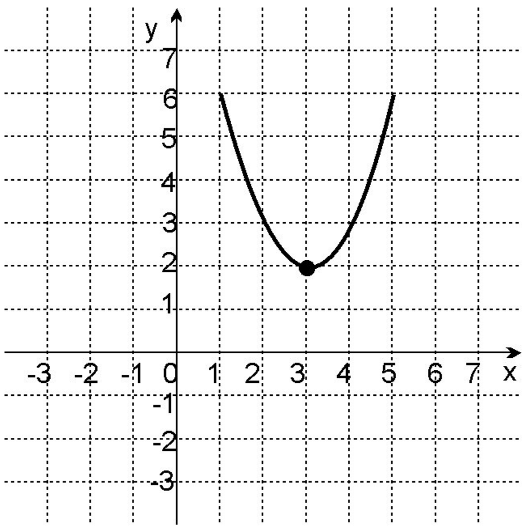
1) Protože je grafem parabola, určíme vrchol.
2) Vrchol naneseme do soustavy souřadnic (x na osu o_x a y na osu o_y)
3) Určíme orientaci paraboly.
4) Vrcholem proložíme parabolu v dané orientaci.

Příklad 1.:

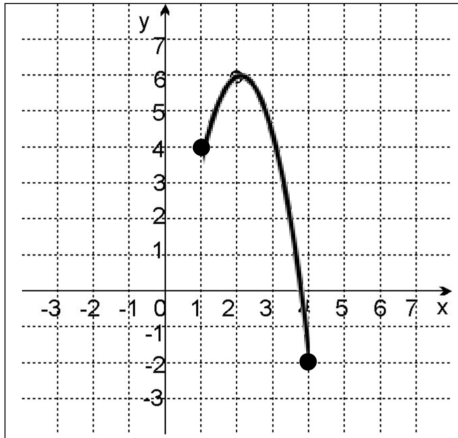
Narýsujte graf funkce f: $y = (x-3)^2 + 2$

Řešení:

Vrchol má souřadnice [3;2] a ramena jdou nahoru (a = 1).



Parabolu ukončíme v bodě x = 1 a x = 4.

	$D_f = \langle 1;4 \rangle$ $H_f = \langle -2;6 \rangle$ rostoucí: na $\langle 1;2 \rangle$ klesající: na $\langle 2;4 \rangle$ monotónní: není omezená zdola: ano omezená shora: ano minimum: x = 4 maximum: x = 2

Cv. 5.:

Narýsujte graf funkcí a určete jejich vlastnosti:

1) f: $y = (x-5)^2 - 1$ na $\langle 3;6 \rangle$
2) f: $y = -(x-4)^2 - 2$ na $\langle 2;6 \rangle$
3) f: $y = 2(x+3)^2 - 4$ na $\langle -4;-2 \rangle$

Příklad 7.:

Určete vrchol grafu funkce f: $y = x^2 - 8x + 11$.

Řešení:

1. způsob:

Doplníme na vzorec $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$:

$y = x^2 - 8x + 16 - 16$ (co jsme si přidali, musíme zase vrátit) $+ 11 =$

$= (x-4)^2 - 16 + 11 = (x-4)^2 - 5$. Tedy:

f: $y = (x-4)^2 - 5$ a vrchol je $\underline{\underline{V = [4;-5]}}$

Cv. 4.:

Určete vlastnosti funkcí ze cvičení 2.

Příklad 6.:

Určete všechny vlastnosti funkcí:

1) f: $y = (x-3)^2 - 2$ na $\langle 1;5 \rangle$
2) f: $y = -2(x-2)^2 + 6$ na $\langle 1;4 \rangle$

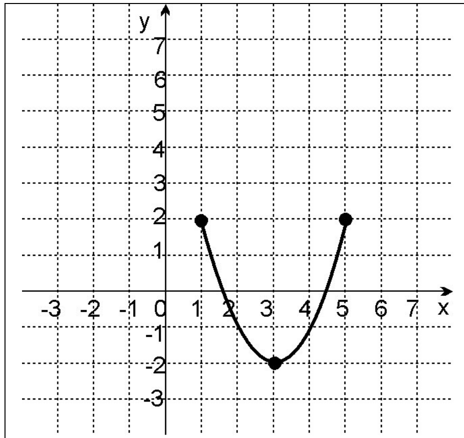
Řešení:

Funkce jsou definované pouze na určitém intervalu. Proto grafem je pouze část o paraboly.

1) f: $y = (x-3)^2 - 2$ na $\langle 1;5 \rangle$

Vrchol má souřadnice [3;2] a ramena jdou nahoru (a = 1).

Parabolu ukončíme v bodě x = 1 a x = 5.



$D_f = \langle 1;5 \rangle$

$H_f = \langle -2;2 \rangle$

rostoucí: na $\langle 1;3 \rangle$

klesající: na $\langle 3;5 \rangle$

monotónní: není

omezená zdola: ano

omezená shora: ano

tedy je omezená

minimum: x = 3

maximum: x = 1; 5

2) f: $y = -2(x-2)^2 + 6$ na $\langle 1;4 \rangle$

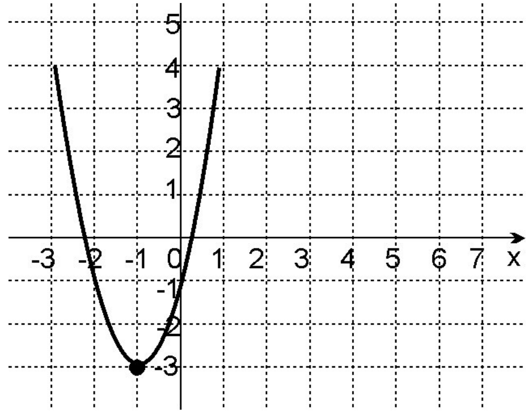
Vrchol má souřadnice [2;6] a ramena jdou dolů (a = -2).

Příklad 2.:

Narýsujte graf funkce f: $y = 2(x+1)^2 - 3$

Řešení:

Vrchol má souřadnice [-1;-3] a ramena jdou nahoru (a = 2).

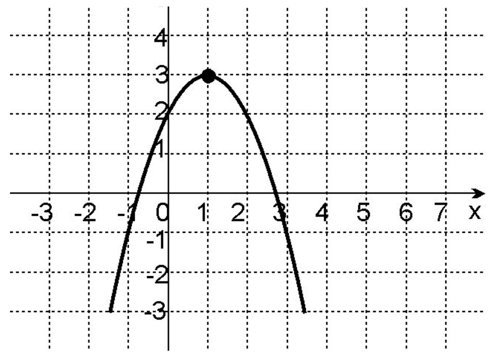


Příklad 3.:

Narýsujte graf funkce f: $y = -(x-1)^2 + 3$

Řešení:

Vrchol má souřadnice [1;3] a ramena jdou dolů (a = -1).



Cv. 2.:

Určete vrchol a orientaci paraboly, a potom narýsujte graf funkce:

1) f: $y = (x - 4)^2 - 1$
2) f: $y = -2(x - 3)^2 + 8$
3) $f: y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$
4) f: $y = (x + 1)^2 + 2$
5) f: $y = -(x - 2)^2 - 3$
6) f: $y = 2(x + 4)^2 - 2$
7) $f: y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2$

Cv. 3.:

U funkcí ze cv. 2 určete průsečíky s osami o_x a o_y (graficky i početně).

Vlastnosti kvadratické funkce

Příklad 5.:

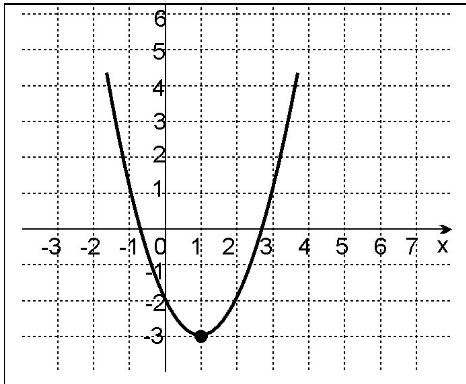
Určete všechny vlastnosti funkcí:

1) f: $y = (x - 1)^2 - 3$
2) f: $y = -2(x + 1)^2 + 5$

Řešení:

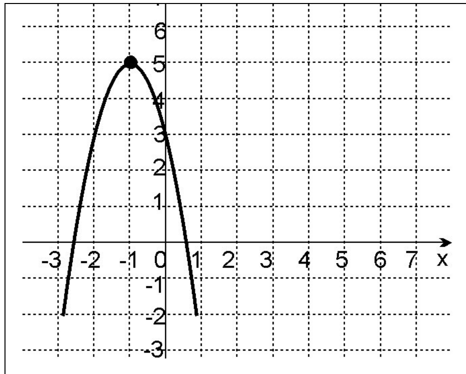
Narýsujeme graf funkce a z něho určíme všechny vlastnosti.

1) f: $y = (x - 1)^2 - 3$



$D_f = R$
$H_f = \langle -3;\infty)$
rostoucí: na $\langle 1;\infty)$
klesající: na $(-\infty;1\rangle$
monotónní: není
omezená zdola: ano
omezená shora: není
minimum: x = 1
maximum: neexistuje

2) f: $y = -2(x + 1)^2 + 5$



$D_f = R$
$H_f = (-\infty;5\rangle$
rostoucí: na $(-\infty;-1\rangle$
klesající: na $\langle -1;\infty)$
monotónní: není
omezená zdola: není
omezená shora: ano
minimum: neexistuje
maximum: x = -1