Zajímavý vzorec

Vzorec: $ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$ kde x_1 a x_2 jsou kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Příklad:

Zjednodušte výraz $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$ Potom: $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x-3} = \underline{\underline{x - 2}}$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \underline{3; 2}$

Příklad:

Zjednodušte výraz $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$:

$x^2 - x - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 25$ Potom: $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x+2} = \underline{\underline{x - 3}}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \underline{3; -2}$

Cv. 1.:

Upravte výrazy:

1) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$ 2) $\frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6}$ 3) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

Cv. 2.:

Upravte výraz $\frac{2}{x^2 - 6x + 8} + \frac{1}{x - 2}$.

Kvadratická rovnice

Postup řešení:

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$ $D = b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Poučení:

Kvadratická rovnice má dvě, jedno nebo žádné řešení. Poznáme to podle diskriminantu.

$D > 0$	2 kořeny
$D = 0$	1 kořen (dva stejné)
$D < 0$	žádný kořen

Cv. 1.:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$
2) $x^2 + 3x + 2 = 0$
3) $x^2 + 7x + 12 = 0$
4) $x^2 - 7x + 10 = 0$
5) $2x^2 + x - 1 = 0$
6) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
7) $8x^2 - 2x - 1 = 0$
8) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Cv. 2.:

1) $x^2 - 9 = 0$
2) $3x^2 - 27 = 0$
3) $x^2 - 8x = 0$
4) $x^2 + 10x = 0$
5) $2x^2 + 8 = 0$
6) $x^2 - 4 = 0$
7) $x^2 - 5x = 0$
8) $2x^2 - 50 = 0$
9) $3x^2 - 12 = 0$
10) $4x^2 + 8x = 0$

Neúplné kvadratické rovnice

Neúplné kvadratické rovnice se dají řešit i jinak:

Příklad:

V kvadratické rovnici chybí koeficient **b** (prostřední člen):

$x^2 - 25 = 0$	***Osamostatníme x^2 a celou rovnici odmocníme:*** $x^2 = 25 \quad / \sqrt{\ }$ $x = -5; 5$ $\underline{\underline{K = \{-5; 5\}}}$  Nesmíme zapomenout, že i $(-5)^2$ je také 25.
$3x^2 - 27 = 0$	$3x^2 = 27$ $x^2 = 9 \quad / \sqrt{\ }$ $x = -3; 3$ $\underline{\underline{K = \{-3; 3\}}}$
$x^2 + 25 = 0$	$x^2 = -25 \quad / \sqrt{\ }$ $\underline{\underline{K = \{\ \}}}$ Záporné číslo **nelze** odmocnit!!!

Příklad:

V kvadratické rovnici chybí koeficient **c** (třetí člen):

$x^2 - 5x = 0$	***Vytkneme před závorku a řešíme jako dvě lineární rovnice:***

Příklad:

Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$.

$x_1 + x_2 = 2 + 4 = \underline{6}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 4 = \underline{8}$

Potom $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x^2 - 6x + 8 = 0}}$

Příklad:

Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = -3$.

$x_1 + x_2 = 2 - 3 = \underline{-1}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-3) = \underline{-6}$

Potom $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x^2 + x - 6 = 0}}$

Cv. 1.:

Která z následujících rovnic má kořeny $x_1 = 5$ a $x_2 = -1$.

1) $x^2 - 4x + 5 = 0$ $\qquad$ 3) $x^2 - 5x + 4 = 0$

2) $x^2 - 4x - 5 = 0$ $\qquad$ 4) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Cv. 2.:

Čísla p, q mají tu vlastnost, že rovnice $x^2 + px + q = 0$ má kořeny $x_1 = -4$ a $x_2 = 3$. Kvadratická rovnice má potom tvar:

1) $x^2 - x - 12 = 0$ $\qquad$ 3) $x^2 + x - 12 = 0$

2) $x^2 - x + 12 = 0$ $\qquad$ 4) $x^2 - 12x + 1 = 0$

Cv. 3.:

Rovnice $x^2 + px + q = 0$ má kořeny 2 a 5. Hodnotu výrazu $2p + q$ je:

1) 24 $\qquad$ 2) -24 $\qquad$ 3) 4 $\qquad$ 4) -4

Cv. 3.: V množině reálných čísel řešte rovnici $(x-4)^2-9=1-x^2$.

Určete, které tvrzení je pravdivé.

1) Rovnice má právě jedno řešení.
2) Rovnice má dva kořeny a jejich rozdíl jsou dvě.
3) Rovnice má dva kořeny a jejich hodnoty jsou opačná čísla.
4) Žádné z výše uvedených tvrzení 1) – 3) nejsou pravdivá.

Cv. 4.: V množině reálných čísel řešte rovnici $(x+4)^2-8(x+3)-1=0$.

Určete, které tvrzení je pravdivé.

1) Rovnice má právě jedno řešení.
2) Rovnice má dva kořeny a jejich rozdíl jsou dvě.
3) Rovnice má dva kořeny a jejich hodnoty jsou opačná čísla.
4) Žádné z výše uvedených tvrzení 1) – 3) nejsou pravdivá.

Cv. 5.: Součet nejmenšího kořenu rovnice $x^2+7x+12=0$ a největšího kořenu rovnice $2x^2+4x-6=0$ je:

1) 3 2) -3 3) -5 4) -6

Vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Definice: Normovaný tvar kvadratické rovnice je:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Každá rovnice $ax^2+bx+c=0$ se dá převést (vydělením celé rovnice číslem $\underline{a}$) na normovaný tvar $x^2+px+q=0$. Potom pro kořeny kvadratické rovnice platí:

1) $x_1+x_2=-p$

2) $x_1\cdot x_2=q$

	$x(x-5)=0$ $x=0$ $\quad x-5=0$ $x=5$ $\underline{\underline{K=\{0;5\}}}$ Toto platí pouze, když na druhé straně rovnice je 0!!! 
$x^2+3x=0$	$x(x+3)=0$ $x=0$ $\quad x+3=0$ $x=-3$ $\underline{\underline{K=\{-3;0\}}}$
$4x^2-2=0$	$x(4x-2)=0$ $x=0$ $\quad 4x-2=0$ $x=\frac{1}{2}$ $\underline{\underline{K=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}}}$

Cv. 1.:

1) $x^2-36=0$
2) $4x^2-100=0$
3) $4x^2-64=0$
4) $x^2+100=0$
5) $x^2-12x=0$
6) $4x^2-32x=0$
7) $5x^2+25x=0$
8) $12x^2-4x=0$
9) $2x^2-72=0$
10) $3x^2-15x=0$
11) $4x^2-125=0$
12) $6x^2-12x=0$
13) $x^2-81=0$
14) $x^2+36=0$
15) $18x^2+6x=0$
16) $5x^2-x=0$

Poučení:

Každá kvadratická rovnice typu $ax^2 + c = 0$ má:

1) $c < 0$ dva symetrické kořeny (kořeny lišící se pouze o znaménko)

2) $c > 0$ nemá řešení

Každá kvadratická rovnice typu $ax^2 + bx = 0$ má vždy dva kořeny. Jeden z kořenů je určitě nulový ($x = 0$).

Cv. 2.:

Určete, které z následujících rovnic mají symetrické kořeny:

1) $x^2 - 10 = 0$

2) $x^2 + 16 = 0$

3) $x^2 - 6x = 0$

4) $3x^2 - 18 = 0$

5) $x^2 - 3x + 6 = 0$

6) $3x^2 - 21x = 0$

7) $2x^2 - 32 = 0$

8) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Cv. 3.:

Určete, které z rovnic ze cvičení 2 mají nulový kořen.

Cv. 4.:

Určete, které z rovnic ze cvičení 2 nemají řešení.

Další příklady

Cv. 1.:

1) $x^2 + 2(x + 4) = 2 - 3x$

2) $x(x + 4) - 5(x - 2) = x + 9$

3) $4(x - 3) - 2x(x - 7) = x(3 - x) + 8x - 2$

4) $x^2 + x(4 - x) = x(x + 6) - 4(x - 1)$

5) $(x + 4)(x - 3) = 5x$

6) $2x(x + 4) - (x + 1)(x - 3) = 2(x - 2)$

7) $(x + 3)(x - 2) = 3(x - 4) + 3x$

8) $2x^2 - (x + 4)(x + 1) = 2(x - 7)$

9) $(x + 2)^2 - 2(x + 4) = 2x$

10) $(2x + 3)^2 = (x + 2)(x - 2) + 1$

11) $(x - 3)^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)(x - 3) + 8$

12) $(2x - 1)(2x + 1) - 2 = (x + 3)^2 - 6x$

13) $(3x + 2)^2 - (x + 4)^2 = 0$

14) $(x + 4)(x - 4) = (2x - 1)^2$

15) $(2x - 3)(2x + 3) - 3x(x - 2) = 6x$

16) $(x + 2)^2 + (x - 1)^2 = (x - 4)^2 + 13$

Cv. 2.:

1) Určete, kolik má rovnice $\frac{1}{2}(x+4) - \frac{x}{4} = 5 + \frac{x}{4}$ řešení:

a) 1

b) 2

c) žádné

d) nekonečně mnoho

2) Určete, kolik má rovnice $\frac{6+25x}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$ řešení:

a) 1

b) 2

c) žádné

d) nekonečně mnoho

3) Určete počet reálných čísel, které vyhovují rovnici: $(x+4)^2 - 8x = 0$:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4